

Cours 4 . Inégalités isopérimétriques quantitatives, A. Pratelli

L'objectif principal de ce cours est de donner un aperçu général sur les résultats anciens et récents sur les versions quantitatives des inégalités générales de type isopérimétrique. Ce genre d'estimations sont essentiellement des "versions d'ordre supérieures" des inégalités classiques. Pour expliquer cela plus précisément, nous pouvons simplement considérer l'exemple de l'inégalité isopérimétrique classique : on sait que, parmi tous les ensembles de volume donné, ceux qui minimisent le périmètre sont les boules. L'inégalité isopérimétrique quantitative dit quelque chose de plus : à savoir qu'un ensemble qui presque minimise le périmètre doit être presque similaire à une boule, en un sens convenablement précisé. Dans ce cours, nous allons présenter l'histoire de base de ce genre de problème et nous décrirons les principaux outils de ce genre de problème qui sont utilisés pour montrer un tel résultat. Nous allons d'abord mettre l'accent sur un "exemple d'or" de l'inégalité isopérimétrique classique, mais nous allons conclure en donnant d'autres exemples importants. Avec les 4 heures de cours, il y aura des séances d'exercices, ce qui aidera les participants à faire face à ce problème.

Séance 1 : Introduction et outils de symétrisation

Dans cette séance, nous allons décrire l'historique du problème et les différentes étapes à terme qui ont été faites par le biais de sa résolution. De plus, nous présenterons les principaux outils techniques qui seront nécessaires par la suite, en particulier les résultats de symétrisation standard.

Séance 2 : Les techniques de N -symétrisation de l'inégalité isopérimétrique classique

Dans la deuxième séance, nous allons montrer comment utiliser les outils présentés précédemment, afin de réduire la preuve de l'inégalité isopérimétrique quantitative classique pour le cas des N -ensembles symétriques. La procédure sera présentée en détail, pour permettre aux participants de comprendre la signification des différentes étapes et la façon d'utiliser tous les outils de symétrisation.

Séance 3 : La preuve de l'inégalité isopérimétrique quantitative classique

Dans cette séance nous allons rassembler toutes les informations trouvées dans les deux premières, et nous allons montrer comment les utiliser afin de conclure la preuve du résultat principal. Nous allons également discuter de la stratégie globale utilisée, afin de souligner la raison du choix de cette construction particulière, et de comprendre quelles parties de la preuve étaient vraiment particulières pour l'inégalité isopérimétrique classique.

Séance 4 : Autres inégalités

Cette dernière séance sera consacrée à la présentation de plusieurs autres inégalités de même nature, à savoir, les versions quantitatives des autres inégalités géométriques et fonctionnelles. Nous n'allons pas donner la preuve de l'une d'elles, mais nous allons essayer de comprendre quelles propriétés peuvent être déduites exactement comme dans le cas classique isopérimétrique, et d'autres propriétés qui ont besoin d'une autre approche différente.