Licence de mathématiques — UNIVERSITÉ DE BREST
L3 : Topologie et analyse fonctionnelle — DMTH5TOP 2012–2013

Examen du 8 janvier 2013. Durée : 3h.
Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice I

Soit $E = \mathbb{C}[z]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes en la variable z. Pour tout $f = \sum_{k=0}^{d} a_k\, z^k \in E$ on pose :

$$\|f\| \;=\; \sum_{k=0}^{d} |a_k|.$$

1. Montrer que $\|\ \|$ définit une norme sur E.

2. Prouver que $B'(0,1) = \{f \in E\ :\ \|f\| \le 1\}$ n'est pas compacte. (*Considérer les* z^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.)

Exercice II

Soient (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue telle que $d(f(x), f(x')) = d(x,x')$ pour tous $x, x' \in X$. Si $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la n-ième itérée de f.

1. a. Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe une suite $(f^{n_p}(x))_{p\in\mathbb{N}}$, extraite de $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\lim_{p\to\infty} f^{n_{p+1}-n_p}(x) = x.$$

b. En déduire que $x \in f(X)$.

2. Conclure que f est une isométrie de X dans X.

Exercice III

On rappelle que si (Y,δ) est un espace métrique compact, alors :

- *l'espace $\mathcal{C}(Y,\mathbb{C})$ des fonctions continues sur Y est un espace vectoriel normé complet pour $\|f\|_\infty = \sup_{x\in Y} |f(x)|$;*
- *une fonction $K \in \mathcal{C}(Y,\mathbb{C})$ est uniformément continue, c'est à dire : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\delta(y,y') \le \alpha$, $y, y' \in Y$, implique $|K(y) - K(y')| \le \epsilon$.*

Soit (X,d) un espace métrique compact. On munit $X \times [0,1]$ de la distance d_∞ définie par $d_\infty((x,t),(x',t')) = \max\{d(x,x'), |t-t'|\}$. On fixe une application continue $K : X \times [0,1] \to \mathbb{C}$. Pour tout $f \in E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, on définit une application $u(f) : X \to \mathbb{C}$ en posant :

$$u(f)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt.$$

1. a. Prouver que $u(f) \in F = \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

TSVP

b. On munit les espaces vectoriels E, F de la norme $\| \|_\infty$. Démontrer que l'application $u : f \mapsto u(f)$ appartient à l'espace $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires continues.

2. On prend ici $X = [0, 1]$.
a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que si $|\lambda| < \kappa$, alors : pour tout $g \in E$, il existe une unique fonction $f \in E$ telle que $f = g + \lambda u(f)$. (*Appliquer le théorème du point fixe.*)
b. Démontrer que pour λ comme en **a**, l'application $\mathrm{id}_E - \lambda u : E \to E$, $f \mapsto f - \lambda u(f)$, est linéaire et inversible.

Exercice IV

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe. (*Par l'absurde, considérer* $U = \{t : f(t) > t\}$ *et* $V = \{t : f(t) < t\}$.)

2. Soit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ (muni de la distance euclidienne).
a. Donner une application continue $g : S^1 \to S^1$ qui ne possède pas de point fixe.
b. Déduire de la question **1** que S^1 ne peut pas être homéomorphe à un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b < +\infty$).

Exercice V

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$, normé par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On définit la suite de fonctions polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ par $p_n(t) = (1 - t^2)^n$ (on a donc $p_0(t) = 1$). On pose

$$A = \left\{ \sum_{n=0}^{d} a_n \, p_n \; : \; a_n \in \mathbb{R}, \; d \geq 0 \right\}.$$

1. Montrer que A est une sous-algèbre de E qui sépare les points de $[0, 1]$. (*Utiliser la fonction* p_1.) En déduire que A est dense dans E.

2. Soit $f \in E$. On suppose que $\int_0^1 f(t) p_n(t) \, dt = 0$ pour tout $n \geq 0$.
a. Prouver que

$$0 \leq \int_0^1 f(t)^2 \, dt = \left| \int_0^1 f(t)(f(t) - g(t)) \, dt \right| \leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 |f(t)| \, dt$$

pour tout $g \in A$.
b. Démontrer que $\int_0^1 f(t)^2 \, dt = 0$ et en conclure que $f = 0$.

Licence de mathématiques UNIVERSITÉ DE BREST
L3 : Topologie et analyse fonctionnelle DMTH5TOP 2012–2013

Examen du 12 juin 2013. Durée : 3h.
Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice I

Soient (F_1, d_1), (F_2, d_2) deux espace métriques. On munit le produit $F_1 \times F_2$ de la distance

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

On désigne par $\pi_1 : F_1 \times F_2 \to F_1$, $\pi_1((x_1, x_2)) = x_1$, la première projection.

1. a. On suppose que (F_2, d_2) est compact. Montrer que π_1 est une application fermée, c'est à dire : si $A \subset F_1 \times F_2$ est fermé alors $\pi_1(A)$ l'est aussi.
b. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^2 = F_1 \times F_2$ d'un sous-ensemble fermé A tel que $\pi_1(A)$ n'est pas fermé.

2. On rappelle que le graphe d'une application $f : F_1 \to F_2$ est défini par

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in F_1\} \subset F_1 \times F_2.$$

a. Prouver que si f est continue, alors $\Gamma(f)$ est fermé dans $F_1 \times F_2$.
b. Donner un exemple d'application non continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le graphe est fermé.
c. On suppose que (F_2, d_2) est compact et que le graphe de f est fermé. Démontrer que f est continue.
Indication : si $X \subset F_2$ est fermé, on introduira le sous-ensemble $A = (F_1 \times X) \cap \Gamma(f)$ de $F_1 \times F_2$.

Notations. *Dans toute la suite de l'examen on pose $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ et on note $E = \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$. On rappelle que E peut être muni de deux normes en posant, pour $f \in E$:*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|, \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

On désigne par E_1, resp. E_∞, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E, \| \|_1)$, resp. $(E, \| \|_\infty)$.

Exercice II

On définit un sous-espace vectoriel F de E en posant $F = \{\varphi \in E : \varphi(0) = 0\}$.

1. Soit $f \in E$. Expliciter une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1} \subset F$ telles que $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1/n) = f(1/n), \quad f_n(t) = f(t) \text{ pour } \frac{1}{n} \leq t \leq 1.$$

2. En déduire que F est dense dans E_1.

TSVP

3. Montrer que la forme linéaire $E \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(0)$, est continue pour $\| \|_\infty$ et prouver que F est fermé dans E_∞.

Exercice III

On note $\mathcal{B}_\infty = \{f \in E \,:\, \|f\|_\infty \leq 1\}$ la boule fermée de centre 0 et rayon 1 dans E_∞.

1. a. Soient $\varphi \in E$ et $x_0 \in I$ tels que $\varphi(x_0) > 1$. À l'aide de la continuité de φ en x_0, montrer qu'il existe un intervalle $K \subset I$ de longueur $\ell > 0$ tel que $\varphi(x) \geq \frac{1}{2}(1+\varphi(x_0))$ pour tout $x \in K$.
b. En déduire que $\|\varphi - \psi\|_1 \geq r = \frac{\ell}{2}(\varphi(x_0) - 1)$ pour tout $\psi \in \mathcal{B}_\infty$.
Indication : on utilisera l'inégalité $\int_I |\varphi(t) - \psi(t)|\, dt \geq \int_K \big||\varphi(t)| - |\psi(t)|\big|\, dt$.

2. a. Démontrer que $\mathcal{B}_\infty$ est un sous-ensemble fermé et borné dans E_1.
Indication : pour montrer que $\mathcal{B}_\infty$ est fermé on établira à l'aide de la question **1** *que le complémentaire de $\mathcal{B}_\infty$ est ouvert dans E_1.*
b. Prouver que $\mathcal{B}_\infty$ n'est pas compact dans E_1.
Indication : on pourra introduire, pour tout $n \geq 2$, la fonction continue f_n qui vaut 0 sur $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, est affine sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$ et vaut 1 sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice IV

Soit $n \in \mathbb{N}$. On fixe $n+1$ éléments $a_0, \ldots, a_n$ deux à deux distincts dans I. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sera identifié à la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$ sur I. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales de degré $\leq n$. On rappelle que si $\mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $L(a_j) = \mu_j$ pour $j = 0, \ldots, n$ (le polynôme d'interpolation de Lagrange).

1. a. Vérifier que

$$P \mapsto N(P) = \max\{|P(a_j)| \,:\, 0 \leq j \leq n\}$$

est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
b. En déduire l'existence de $C_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|P\|_\infty \leq C_n\, N(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

2. On fixe $f \in E$ et $\epsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
(i) $\|f - Q\|_\infty \leq \epsilon$;
(ii) $Q(a_j) = f(a_j)$ pour $j = 0, \ldots, n$.
Indication : on commencera par justifier l'existence de $Q_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - Q_0\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{1+C_n}$ puis on prendra $Q = Q_0 + L$, où L est un polynôme d'interpolation de Lagrange.

Licence de mathématiques UNIVERSITÉ DE BREST
L3 : Topologie et analyse fonctionnelle DMTH5TOP 2013–2014

Examen du 9 janvier 2014. Durée : 3h.
Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur $[0,1]$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$(f \mid g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt.$$

1. Montrer que $(\ \mid\ )$ est un produit scalaire sur E. On note $\|f\| = \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ la norme associée.

2. Démontrer que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \sqrt{2}\|f\|$ pour tout $f \in E$. (*On utilisera les inégalités* $\int_0^1 |f'(t)|\,dt \leq \left(\int_0^1 f'(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ *et* $a + b \leq \sqrt{2}(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ *pour* $a, b \in \mathbb{R}_+$.)

3. Prouver que les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|$ ne sont pas équivalentes. (*Considérer* $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin(n\pi t)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.)

Exercice 2

Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques et $f : (E, d) \to (F, \delta)$ une application continue. On suppose que E est compact et non vide.

1. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés non vides de E.

a. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide de E.

b. On suppose que $y = f(x_n) \in F$ avec $x_n \in K_n$ pour tout n. En considérant une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$, prouver que $y = f(a)$ avec $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

c. En déduire que :

$$\text{(i)}\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n) = f\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big)\ ; \quad \text{(ii)}\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n) \text{ est un compact non vide de } F.$$

2. Donner un exemple avec $E = F = \mathbb{R}$ montrant que la conclusion de la question **1.c** (i) est fausse si l'on ne suppose pas que E est compact.

3. On suppose $(E, d) = (F, \delta)$ et l'on note $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois) la n-ième itérée de f. Construire à l'aide des f^n et de la question **1** un sous-ensemble A compact non vide dans E tel que $f(A) = A$.

TSVP

Problème

I

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ; la distance associée à la norme est notée $d(x,y) = \|x-y\|$.

Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. On pose $H = \operatorname{Ker}\varphi$. On rappelle que H est un hyperplan de E et l'on fixe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = 1$, de sorte que $E = H \oplus \mathbb{K}a$: tout $x \in E$ s'écrit $x = (x - \varphi(x)a) + \varphi(x)a$.

1. Vérifier que $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E et en déduire que si H n'est pas fermé dans E, il est dense dans E.

2. Montrer que si φ est continue alors H est fermé.

3. On suppose dans cette question que H est fermé.

a. Montrer que $a + H = \varphi^{-1}(1)$ est fermé dans E. En déduire l'existence de $\rho > 0$ tel que $B'(0,\rho) \cap (a+H) = \emptyset$. (On note $B'(0,\rho)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon ρ.)

b. Démontrer que $|\varphi(x)| \leq 1$ pour tout $x \in B'(0,\rho)$. (*On pourra raisonner par l'absurde et considérer* $y = \frac{1}{\varphi(x)}x$.)

c. En déduire que φ est continue.

4. On suppose que φ est continue et l'on désigne par $\|\varphi\|$ la norme subordonnée de φ, i.e. $\|\varphi\| = \sup\left\{\frac{|\varphi(z)|}{\|z\|} : z \in E \setminus \{0\}\right\}$. On rappelle que si $z \in E$, $d(z,H) = \inf_{y\in H} d(z,y)$ est la distance de z à H.

a. Prouver que

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{h\in H \\ \lambda\in\mathbb{K}^*}} \frac{|\lambda|}{\|h+\lambda a\|}$$

et en déduire que : $\|\varphi\| = \dfrac{1}{d(a,H)}$.

b. Soit $z = h + \varphi(z)a$, $h \in H$, un élément de E. Démontrer que

$$d(z,H) = |\varphi(z)|\, d(a,H) = \frac{|\varphi(z)|}{\|\varphi\|}.$$

II

On désigne par $\mathcal{C}_0$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

1. a. Vérifier (rapidement) que $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ définit une norme sur $\mathcal{C}_0$.

Pour $x = (x_n)_n \in \mathcal{C}_0$ on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x_n = x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 + \cdots$$

b. Montrer que $\varphi : \mathcal{C}_0 \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue pour $\| \ \|$ et que $\|\varphi\| \leq 2$.

c. Démontrer que $\|\varphi\| = 2$. (*On pourra prendre* $x_n = k^n$.)

2. Soit $x \in \mathcal{C}_0$ tel que $\|x\| = 1$. Démontrer que $|\varphi(x)| < 2$. (*Soit* $0 < \varepsilon < 1$ *; introduire* $n_0 \geq 1$ *tel que* $|x_n| \leq \varepsilon$ *pour* $n \geq n_0$ *et majorer* $\varphi(x) = \sum_{n<n_0} \frac{1}{2^n}x_n + \sum_{n\geq n_0} \frac{1}{2^n}x_n$.)

3. Soit $H = \operatorname{Ker}\varphi$ et $z \in E \setminus H$. Démontrer qu'il n'existe pas de $h \in H$ tel que $d(z,h) = d(z,H)$. (*Si* $d(z,h) = d(z,H)$, *poser* $x = \frac{z-h}{\|z-h\|}$ *puis utiliser* **II.2** *et* **I.4**.)

Licence de mathématiques Université de Brest
L3 : Topologie et analyse fonctionnelle DMTH5TOP 2013–2014

Examen du 11 juin 2014. Durée : 3h.
Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Les exercices et le problème sont indépendants.

Dans les exercices 1, 2 et 3 on désigne par (E, d) un espace métrique.

Exercice 1

1. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de (E, d). Démontrer que pour toute partie B de E on a $\mathcal{O} \cap \overline{B} \subset \overline{\mathcal{O} \cap B}$.

2. Donner un exemple de deux intervalles A, B de $\mathbb{R}$ tels que B est ouvert et $A \cap \overline{B}$ n'est pas contenu dans $\overline{A \cap B}$.

3. Donner un exemple de deux ouverts A, B de $\mathbb{R}$ tels que les parties $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont toutes différentes.

Exercice 2

Soient K un sous-ensemble compact de (E, d) et r un réel strictement positif.
On pose $F = \bigcup_{x \in K} B'(x, r)$ où $B'(x, r)$ est la boule fermée de centre x et rayon r. Démontrer que F est fermé dans (E, d).

Exercice 3

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts de (E, d), i.e. $K_{n+1} \subset K_n$, et $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.
Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de (E, d) contenant A. Démontrer qu'il existe un entier m tel que $K_m \subset \mathcal{O}$.
Indication : On pourra raisonner par l'absurde et introduire la suite de parties $K_n \cap {}^c\mathcal{O}$, $n \in \mathbb{N}$, où ${}^c\mathcal{O}$ est le complémentaire de $\mathcal{O}$ dans E.

Exercice 4

Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est une fonction continue, on définit l'ensemble des points fixes de f par $\Phi(f) = \{a \in [0, 1] : f(a) = a\}$.

1. Pourquoi l'ensemble $\Phi(f)$ est-il fermé dans $\mathbb{R}$?

2. Soit $F \subset [0, 1]$ un fermé non vide. Rappeler la définition de la distance $d(x, F)$ de x à F, puis démontrer qu'il existe une fonction continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $F = \Phi(f)$.
Indication : Si $a \in F$, introduire la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + d(x, F) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq a, \\ x - d(x, F) & \text{si} \quad a < x \leq 1. \end{cases}$$

TSVP

Problème

Pour tout $\lambda \in]0,1]$ on munit l'espace $\mathcal{C}([-\lambda,\lambda],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[-\lambda,\lambda]$ vers $\mathbb{R}$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [-\lambda,\lambda]\}$. On pose :

$$\mathsf{C}_\lambda = \{\varphi \in \mathcal{C}([-\lambda,\lambda],\mathbb{R}) \,:\, \varphi(0)=0 \text{ et } \|\varphi\|_\infty \leq 1\}\,.$$

1. Vérifier que C_λ est un fermé non vide de l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}([-\lambda,\lambda],\mathbb{R})$. En déduire que C_λ est un espace métrique complet pour la distance induite, donnée par $d_\lambda(\varphi,\psi) = \|\varphi-\psi\|_\infty$ pour $\varphi,\psi \in \mathsf{C}_\lambda$.

On note F une fonction continue de $[-1,1]\times[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

(i) $F(0,0)=0$;

(ii) il existe $k \in]0,1[$ tel que $|F(x,y') - F(x,y)| \leq k\,|y'-y|$ pour tous $x,y,y' \in [-1,1]$.

2. Expliquer pourquoi la condition (ii) est satisfaite lorsque la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe et vérifie $\left|\frac{\partial F}{\partial y}(u,v)\right| \leq k < 1$ pour tous $(u,v) \in [-1,1]\times[-1,1]$.

3. Soit $\varphi \in \mathsf{C}_\lambda$. Vérifier que l'on définit un élément $T(\varphi) \in \mathcal{C}([-\lambda,\lambda],\mathbb{R})$, tel que $T(\phi)(0)=0$, en posant :

$$\forall\, x \in [-\lambda,\lambda], \quad T(\varphi)(x) = F(x,\varphi(x)).$$

4. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $|F(x,0)| \leq 1-k$ pour $|x| \leq \rho$ et en déduire qu'alors $\varphi \in \mathsf{C}_\rho$ implique $T(\varphi) \in \mathsf{C}_\rho$.

5. On fixe ρ comme en **4** ; on peut donc définir l'application $T : \varphi \mapsto T(\varphi)$ de C_ρ dans lui-même. Démontrer que T est contractante et qu'il existe une unique fonction $f \in \mathsf{C}_\rho$ telle que $f(x) = F(x,f(x))$ pour tout $x \in [-\rho,\rho]$.

6. Soient $g \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ telle que $g(0)=0$ et $k \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ et une unique fonction $f \in \mathsf{C}_\rho$ telle que $f(x) = k\sin\big(g(x)+f(x)\big)$ pour tout $x \in [-\rho,\rho]$.